Zbirka vaj iz astronomije

Andreja Gomboc

Fakulteta za naravoslovje, Univerza v Novi Gorici
Morebitne napake prosim sporočite na: `andreja.gomboc@ung.si`

1 Nebesne koordinate

1. Katere zvezde so nadobzornice in katere podobzornice za:
   a) observatorij na Črnem vrhu ($\varphi = 45°56'48''$North, $\lambda = 14°04'25''$East)
   in
   b) za ESO La Silla observatorij ($\varphi = -29°15'0''$South, $\lambda = -70°44'0''$West)?

   Rešitev:
   Na severni polobli velja za zvezde v najnižji točki njihove dnevne poti po nebu (glej sliko): $\delta + z + \varphi = 180°$. Za tiste, ki so nadobzornice velja $z < 90°$ in sledi $\delta > 90° - \varphi$.
   Za zvezde z negativno deklinacijo velja v najvišji točki njihove dnevne poti po nebu: $z = \varphi + |\delta|$. Za podobzornice je $z > 90°$ in sledi, da je $|\delta| > 90° - \varphi$ oziroma $\delta < \varphi - 90°$.
   Na južni polobli je situacija obrnjena (glej sliko), φ je negativen, pol je viden nad južnim horizontom. Za zvezde v najnižji točki velja: $|\delta| + z + |\varphi| = 180°$, za nadobzornice $z < 90°$ in sledi $|\delta| > 90° - |\varphi|$ ali $\delta < |\varphi| - 90°$. Za podobzornice je $\delta > 0$ in velja podobno kot prej: $z = |\varphi| + \delta$, $z > 90°$ in sledi, da je $\delta > 90° - |\varphi|$.
   Povzetek:
   Na zemljepisni širini φ vzhajajo in zahajajo zvezde, ki imajo deklinacijo v območju: $-(90° - |\varphi|) < \delta < (90° - |\varphi|)$.
   Nadobzornice na $\varphi > 0$ in podobzornice na $\varphi < 0$ so zvezde z: $\delta > (90° - |\varphi|)$.
   Podobzornice na $\varphi > 0$ in nadobzornice na $\varphi < 0$ so zvezde z $\delta < (|\varphi| - 90°)$.
   Za Črni vrh so nadobzornice zvezde z $\delta > 90° - 45°56'48'' = 44°03'12''$, podobzornice pa zvezde z $\delta < 45°56'48'' - 90° = -44°03'12''$.
   Za ESO La Silla so nadobzornice zvezde z $\delta < 29°15' - 90° = -60°45'$ in podobzornice zvezde z $\delta > 90° - 29°15' = 60°45'$.

2. Na katerem intervalu mora biti deklinacija zvezde, če naj jo vidimo iz Ljubljane ($\varphi \approx 45°$)? Kolikšen odstotek prostorskega kota pokrivajo zvezde vidne iz naših geografskih širin? Rešitev:

   $-45° < \delta < 90°$, $\mathit{\Delta\Omega} = 2\pi \int_{-135°}^{0°} d(\cos\theta) = 2\pi(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\frac{\mathit{\Delta\Omega}}{\mathit{\Omega}} = 0.854$

3. Kolikšna je dolžina sfernega loka (v stopinjah in v kilometrih) med Ljubljano ($\varphi_1 = 46°02'37''$ North, $\lambda_1 = 14°31'38''$ East) in New Yorkom ($\varphi_2 = 44°41'43''$ North, $\lambda_2 = -73 \circ 27'30''$ West)? $R_Z = 6400km$

   Rešitev:

$$\cos l = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (1)$$
$$\cos l = \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (2)$$
$$\cos l = 0.524 \Rightarrow l = 58.4° \quad (3)$$
$$D[km] = R_Z l[rad] = 6400km \cdot \frac{58.4°}{180°} \cdot \pi = 6526km. \quad (4)$$

4. Dne 8.11. 2006 ob polnoči želimo v Sloveniji opazovati zvezdo Algol ($\alpha_\mathrm{A} = 03^\mathrm{h}08^\mathrm{m}10^\mathrm{s}, \delta_\mathrm{A} = +40°57'20''$). Iz efemerid preberemo, da so koordinate Lune ob $\mathrm{UT} = 0^\mathrm{h}$ dne 8. 11. 2006: $\alpha_8 = 05^\mathrm{h}08^\mathrm{m}, \delta_8 = 28.0°$ in dne 9. 11. 2006: $\alpha_9 = 06^\mathrm{h}11^\mathrm{m}, \delta_9 = 28.5°$. Ali nam bo Luna motila opazovanja oz. kolikšna je razdalja med Luno in Algolom?

   Rešitev:
   $t = 24^h \Rightarrow UT = t - 1^h = 23^h$. Koordinate Lune ob tem času določimo z interpolacijo med α_8, δ_8 in α_9, δ_9:

$$\alpha_L = \alpha_8 + \frac{(\alpha_9 - \alpha_8)}{24h} \cdot 23h = 6.140^h = 92.094° \quad (5)$$
$$\delta_L = \delta_8 + \frac{(\delta_9 - \delta_8)}{24h} \cdot 23h = 28.479° \quad (6)$$

   Razdaljo med Algolom in Luno izračunamo iz sfernega trikotnika na sliki in kosinusnega izreka:

$$\cos d = \cos(90° - \delta_L)\cos(90° - \delta_A) + \sin(90° - \delta_L)\sin(90° - \delta_A)\cos(\alpha_A - \alpha_L) \quad (7)$$
$$\cos d = \sin(\delta_L)\sin(\delta_A) + \cos(\delta_L)\cos(\delta_A)\cos(\alpha_A - \alpha_L) \quad (8)$$

   Ko vstavimo v to enačbo numerične vrednosti, dobimo $\cos d = 0.7815$ oziroma razdaljo med Luno in Algolom, $d = 38.6°$.

5. Ali je bil 12. oktobra 1996 iz Ljubljane ($\varphi = 46°02'37''$ North, $\lambda = 14°31'38''$ East) viden Sončni mrk? Iz efemerid preberemo koordinate Sonca in Lune ob $UT = 0^h$:
Sonce
dne 12. 10.: $\alpha_{\odot,12} = 13^h09^m54.6^s, \delta_{\odot,12} = -7°25'5.1''$
dne 13. 10.: $\alpha_{\odot,13} = 13^h13^m36.5^s, \delta_{\odot,13} = -7°47'33.9''$
Luna
dne 12. 10.: $\alpha_{L,12} = 12^h44^m39^s, \delta_{L,12} = -4°24'11''$
dne 13. 10.: $\alpha_{L,13} = 13^h33^m54^s, \delta_{L,13} = -8°09'59''$

Rešitev:
Med zgornjima dvema trenutkoma lahko dovolj natančno izračunamo koordinate Sonca in Lune z linearno interpolacijo

$$\alpha_{\odot,L}(t) = \alpha_{12} + \frac{(\alpha_{13} - \alpha_{12})}{24h} \cdot t \tag{9}$$

$$\delta_{\odot,L}(t) = \delta_{12} + \frac{(\delta_{13} - \delta_{12})}{24h} \cdot t, \tag{10}$$

kjer je t v urah izražen UT čas dne 12. 10.
Ali je prišlo do Sončnega mrka ugotovimo iz razdalje med Soncem in Luno na nebu, ki jo dobimo iz kosinusnega izreka:

$$\cos d = \cos(90° - \delta_L)\cos(90° - \delta_\odot) + \sin(90° - \delta_L)\sin(90° - \delta_\odot)\cos(\alpha_\odot - \alpha_L) \tag{11}$$

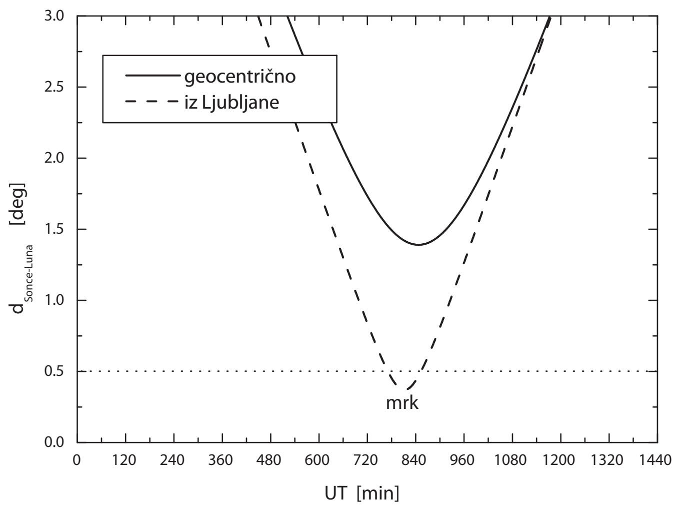
$$\cos d = \sin(\delta_L)\sin(\delta_\odot) + \cos(\delta_L)\cos(\delta_\odot)\cos(\alpha_\odot - \alpha_L) \tag{12}$$

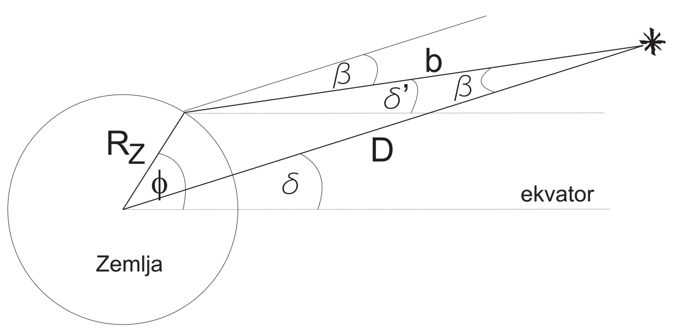
Vstavimo v enačbo $\alpha_\odot(t), \delta_\odot(t)$ in $\alpha_L(t), \delta_L(t)$ iz interpolacije (10) in narišemo graf razdalje d v odvisnosti od časa (polna črta na sliki). Ugotovimo, da je razdalja d med Soncem in Luno na nebu vedno večja od 0.5° (vodoravna pikčasta črta) kolikor je navidezni premer Lune in Sonca. Torej bi sklepali, da Luna ne zakrije Sonca in do mrka ne pride. Toda: računali smo z geo-centričnimi koordinatami, torej glede na središče Zemlje. Mi pa opazujemo s površine Zemlje na zemljepisni širini φ. Smer v kateri vidimo neko nebesno telo, oziroma točneje njegova deklinacija δ (nebesna širina objekta ali "višina" nad nebesnim ekvatorjem) je za kot β manjša kot če bi gledali iz središča Zemlje. Za trikotnik na sliki zapišemo sinusni izrek:

$$\frac{\sin\beta}{R_Z} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{b} \tag{13}$$

$$\sin\beta = \frac{R_Z}{b}\sin(\varphi - \delta) \tag{14}$$

Vidimo, da vpliv tega efekta pada z razdaljo do nebesnega telesa. V našem primeru ga moramo upoštevati za Luno, za Sonce pa ga lahko zanemarimo





(preveri). Ker je razdalja do Lune D=384.400 km veliko večja od polmera Zemlje $R_Z = 6400km$ velja (na okrog 1 odstotek natančno), da je $b \approx D$ in dobimo:

$$\sin\beta = \frac{R_Z}{D}\sin(\varphi - \delta_L) = 0.0107 \Rightarrow \beta = 0.75^\circ \tag{15}$$

Deklinacijo lune popravimo: $\delta_L(t)' = \delta_L(t) - \beta$ in ponovno izračunamo razdaljo d med Luno in Soncem. Kot kaže prekinjena črta na sliki, Sončni mrk bo in to okrog $UT = 13 - 14^h$ oziroma po naši uri od okrog 15. do 16. ure.

6. Kolikšen je krajevni zvezdni čas nekega dne pozimi ob 3^h zjutraj po srednjeevropskem času v Ljubljani ($\lambda = 0^{\mathrm{h}}58^{\mathrm{m}}6.5^{\mathrm{s}}$), če preberemo iz tabel,

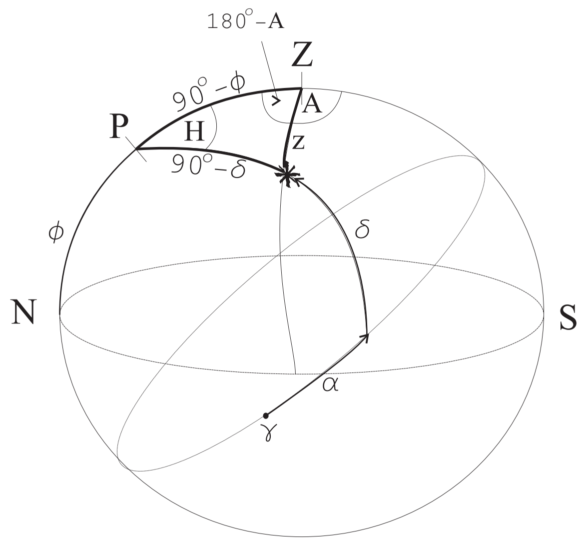
da je tabelirani zvezdni čas za Greenwich tega dne ob UT=0^{h} enak $S_G^0 = 9^{\mathrm{h}}10^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$?

Rešitev:
Najprej iz conskega časa t_n^z pozimi in $n = 1^h$ za srednjo Evropo določimo univerzalni čas UT: $UT = t_n^z - n = 2^h$. UT nato pretvorimo v krajevni zvezdni čas na Greenwichu $t^*_{\lambda=0}$, tega pa v lokalni zvezdni čas:

$$t^*_{\lambda=0} = S_G^0 + UT \cdot \frac{366.25}{365.25} = 11.17^h = 11^h 10^m 20^s \quad (16)$$

$$t^*_{\lambda} = t^*_{\lambda=0} + \lambda = 11^h 10^m 20^s + 0^h 58^m 6.5^s = 12^h 8^m 26.5^s \quad (17)$$

7. Na Golovcu ($\lambda = 0^{\mathrm{h}}58^{\mathrm{m}}$, $\varphi = 46°3'$) želimo februarja opazovati zvezdo Betelgeza v ozvezdju Orion, ki ima rektascenzijo α= $5^{\mathrm{h}}55^{\mathrm{m}}$ in deklinacijo δ= $+7°24,5'$. Iz tabel preberemo, da bo v trenutku opazovanja zvezdni čas $t^*_\lambda = 12^h 8.4^m$. Kolikšna bosta azimut A in zenitna razdalja z Betelgeze?


180°–A
Z
90°–ϕ
A
P
H
z
90°–δ
ϕ
δ
N
S
α
γ

Rešitev:
Pretvorimo rektascenzijo α in deklinacijo δ v azimut A in zenitno razdaljo z. Pri tem si pomagamo s sfernim trikotnikom na sliki. Zapišemo kosinusni izrek:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi)\cos H \quad (18)$$
$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H \quad (19)$$

in izračunamo zenitno razdaljo:

$$\cos z = 0.053 \Rightarrow z = 86.9^\circ \quad (20)$$

Da določimo A, zapišimo najprej sinusni izrek:

$$\frac{\sin z}{\sin H} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\cos\delta}{\sin A} \quad (21)$$
$$\sin z \sin A = \cos\delta \sin H \quad (22)$$

in še en kosinusni izrek:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos z + \sin(90^\circ - \varphi)\sin z\cos(180^\circ - A) \quad (23)$$
$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A \quad (24)$$
$$\sin z\cos A = \frac{\sin\varphi\cos z - \sin\delta}{\cos\varphi}. \quad (25)$$

Iz enačb 22 in 25, ali njune kombinacije ki nam da $\tan A$, lahko izračunamo A z uporabo obratnih trigonometričnih funkcij. Vendar na intervalu $A \in [0, 360^\circ]$ ne dobimo enolične rešitve. Zato je bolje uporabiti polovične kote. V splošnem velja: $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Za naš primer zapišemo:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\frac{\cos\delta\sin H}{\sin z}}{1 + \frac{\sin\varphi\cos z - \sin\delta}{\sin z\cos\varphi}} \quad (26)$$
$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\cos\delta\cos\varphi\sin H}{\sin(z+\varphi) - \sin\delta} \quad (27)$$

Potrebujemo še časovni kot: $H = t^*_\lambda - \alpha = 6^h 13.4^m = 93.3^\circ$ in dobimo:

$$\tan\frac{A}{2} = 1.14 \Rightarrow A = 97.5^\circ \quad (28)$$

8. Neka zvezda je dne 10. novembra 2006 v Ljubljani ($\varphi = 46^\circ 3'$, $\lambda = 14^\circ 32'$) zašla ob 23h pri azimutu 130° (merjeno od juga proti zahodu). Kolikšni sta njena rektascenzija in deklinacija?

Tega dne je tabelirani zvezdni čas za Greenwich ob UT=0^{h} enak $\mathrm{S}_{\mathrm{G}}^{0} = 3^{\mathrm{h}}16^{\mathrm{m}}3.5^{\mathrm{s}}$.

Rešitev:
Izračunamo zvezdni čas v trenutku zahoda:

$$UT = t_n^z - n = 22^h \tag{29}$$

$$t^*_{\lambda=0} = S_G^0 + UT \cdot \frac{366.25}{365.25} = 25.3279^h \tag{30}$$

$$t^*_\lambda = t^*_{\lambda=0} + \lambda = 26.2968^h \tag{31}$$

Zapišemo izraz za zenitno razdaljo 19 in upoštevamo, da je v trenutku zahoda $z = 90°$, sledi:

$$\cos H_0 = -\tan\varphi\tan\delta \tag{32}$$

Kosinusni izrek nam da:

$$\cos A = \cos(180° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \sin(180° - \varphi)\sin(90° - \delta)\cos H_0 \tag{33}$$

Vstavimo $cosH_0$ iz 32:

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \tag{34}$$

$$\text{sledi: } \sin\delta = -\cos A\cos\varphi = 0.4461 \Rightarrow \delta = 26.4946° = 26°29'41'' \tag{35}$$

Sedaj lahko izračunamo še α. Iz 32 sledi: $\cos H_0 = -0.5171$ in $H_0 = 121.136° = 8.07576^h$. Iz $t_\lambda = \alpha + H$ sledi, da je: $\alpha = t_\lambda - H_0 = 18.2211^h = 18^h13^m16^s$.

9. Kdaj bo zvezda Atair v ozvezdju Orla, ki ima rektascenzijo $\alpha = 19^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}47^{\mathrm{s}}$ in deklinacijo $\delta = +8°52'06''$, v Ljubljani ($\varphi = 46°2'37''$, $\lambda = 0^{\mathrm{h}}58^{\mathrm{m}}7^{\mathrm{s}}$) dne 14. 9. 2007 vzšla, kulminirala in zašla?
Iz tabel preberemo, da je ta dan zvezdni čas za Greenwich ob UT=0^{h} enak $\mathrm{S}_{\mathrm{G}}^{0} = 23^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}22^{\mathrm{s}}$.

Rešitev:
Zvezda kulminira, ko je njen časovni kot $H = 0$. Sledi, da je takrat $t^*_\lambda = H + \alpha = \alpha$ in $t^*_{\lambda=0} = t^*_\lambda - \lambda = \alpha - \lambda = 18^h52^m40^s$. Zvezdni čas na Greenwichu pretvorimo v univerzalni čas:

$$UT = (t^*_{\lambda=0} - S_G^0) \cdot \frac{365.25}{366.25} = 19^h19^m8^s. \tag{36}$$

V naši časovni coni prištejemo UT še $n = 1^h$ in v obdobju poletnega časa še dodatno 1^h. Naša ura bo v trenutku kulminacije Ataira kazala čas $t_{kulm} = 21^h19^m8^s$.

Pri računanju trenutka vzhoda in zahoda si pomagamo s trikotnikom na sliki, za katerega zapišemo kosinusni izrek:

$$\cos z = \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta) + \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta)\cos H \quad (37)$$

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H \quad (38)$$

V trenutku vzhoda ali zahoda je zenitna razdalja $z = 90^\circ$ in sledi $cosH_0 = -\tan\varphi\tan\delta$. Z zgornjimi podatki dobimo $cosH_0 = -0.1618$ in $H_0 = \pm 99.31^\circ = \pm 6^h 37^m 15^s$.
Za vzhod velja: $H_{vzhoda} = 24^h - 6^h 37^m 15^s = 17^h 22^m 45^s$, za zahod pa $H_{zahoda} = 6^h 37^m 15^s$. Upoštevamo, da je $t^*_\lambda = H + \alpha$ in $t^*_{\lambda=0} = t_\lambda - \lambda$ in dobimo zvezdni čas na Greenwichu: $t^*_{\lambda=0} = H + \alpha - \lambda$, ki ga (tako kot zgoraj pri računanju kulminacije) pretvorimo v čas, ki ga kaže ura:

$$t^{poletni}_{n=1} = (t^*_{\lambda=0} - S^0_G) \cdot \frac{365.25}{366.25} + 2^h \quad (39)$$

Za vzhod dobimo $t_{vzhoda} = 14^h 45^m 3^s$, za zahod pa $t_{zahoda} = 3^h 25^m 44^s$.

10. Dne 27. septembra 1996 je bil popoln Lunin mrk. Iz efemerid preberemo koordinati Sonca tega dne: rektascenzija $\alpha_\odot = 12^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}$ in deklinacija $\delta_\odot = +0^\circ 22'$. Kako visoko nad obzorjem je bila Luna ob 3^h zjutraj v Ljubljani ($\lambda = 0^{\mathrm{h}}58^{\mathrm{m}}$, $\varphi = 46^\circ 3'$)? Zvezdni čas ob $\mathrm{UT}=0^{\mathrm{h}}$ tega dne je $\mathrm{S}^0_{\mathrm{G}} = 0^{\mathrm{h}}24^{\mathrm{m}}15^{\mathrm{s}}$.

Rešitev: Do Luninega mrka pride takrat, ko je Luna v Zemljini senci. Sonce, Zemlja in Luna ležijo na premici. Luna je torej na ravno nasprotnem delu nebesne sfere kot Sonce. Njene koordinate ocenimo, da so:

$$\alpha_L = \alpha_\odot - 12^h = 0^h 15^m \quad (40)$$

$$\delta_L = -\delta_\odot = -0^\circ 22' \quad (41)$$

Izračunamo zvedzni čas ob $t^z_n = 3^h$ (upoštevamo, da je septembra še poletni čas):

$$UT = t^z_n - 2^h = 1^h \quad (42)$$

$$t^*_{\lambda=0} = S^0_G + UT \cdot \frac{366.25}{365.25} = 1.40694^h \quad (43)$$

$$t^*_\lambda = t^*_{\lambda=0} + \lambda = 2.37361^h. \quad (44)$$

Časovni kot Lune je: $t^*_\lambda = H + \alpha \Rightarrow H_L = t^*_\lambda - \alpha_L = 2.12364^h = 31.854^\circ$.
Iz enačbe 19 izračunamo zenitno razdaljo z:

$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H \quad (45)$$

$$\cos z = 0.5941 \Rightarrow z = 53.55^\circ \quad (46)$$

Višina nad obzorjem je: $h = 90° - z = 36.45°$.

11. Stari Egipčani so posebej častili zvezdo Sirij ($\alpha = 6^h 45^m, \delta = -16°42'$), ki jim je označevala začetek poplav Nila. kako visoko na nebu je Sirij na prvi pomladanski dan ob sončnem zahodu v Kairu (ki ima $\varphi = 30°$)?

    Rešitev:
    Na prvi pomladni dan je rektascenzija Sonca $\alpha_\odot = 0$, ob zahodu je časovni kot Sonca $H_\odot = 6^h$ in sledi, da je zvezdni čas $t^*_\lambda = H_\odot - \alpha_\odot = 6^h$. časovni kot Sirija je: $H = t^*_\lambda - \alpha = -0^h 45^m = -11.25°$. Iz kosinusnega izreka dobimo zenitno razdaljo Sirija:

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H \tag{47}$$

$$\cos z = 0.67 \Rightarrow z = 47.9° \Rightarrow h = 42.1° \tag{48}$$

12. na observatoriju Roque de los Muchachos na otoku La Palma, ki ima koordinate $\varphi = 28°45'45", \lambda = -17°52'45"$.

13. Predpostavimo, da se Sonce giblje po ekliptiki enakomerno (zakaj se ne?) in bi veljalo : $\lambda_\odot = kt$. Ali bi se enakomerno spreminjala tudi njegova rektascenzija - ali bi se gibalo enakomerno tudi po ekvatorju? Nagib ekliptike je $\epsilon = 23°27'$.

    Rešitev:
    Iz slike razberemo:

$$\cos\lambda = \cos\alpha \cos\delta + \sin\alpha \sin\delta \cdot 0 \Rightarrow \cos\delta = \frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}$$

    Sinusni izrek nam da:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\epsilon} = \frac{\sin\lambda}{\sin 90°} \Rightarrow \sin\delta = \sin\lambda \sin\epsilon$$

    Še en kosinusni izrek nam da:

$$\cos\delta = \cos\lambda \cos\alpha + \sin\alpha \sin\lambda \cos\epsilon$$

    Vstavimo $\cos\delta$ iz prvega izraza, upoštevamo, da je $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ in dobimo:

$$\tan\alpha = \tan\lambda \cdot \cos\epsilon.$$

Vidimo, da tudi, če λ narašča enakomerno s časom, α ne.

2 Paralaksa, izsevi in magnitude zvezd

1. Kako daleč je zvezda Sirij, če vemo, da je njena paralaksa $p = 0.38''$?

   Rešitev:
   Paralaksa je kot: $p = \frac{1a.e.}{d}$ ali izražen v kotnih sekundah:

   $$p'' = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3600'' \cdot \frac{1a.e.}{d} = \frac{1}{d[\mathrm{pc}]}$$

   iz česar sledi definicija enote parsek (pc): 1 pc je razdalja, na kateri je paralaksa zvezde 1 kotna sekunda. Torej 1 pc = 206 265 a.e. = $3.08 \cdot 10^{16}$ m = 3.26 sv. let.
   Izračunamo oddaljenost Sirija:

   $$d[\mathrm{pc}] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.38''} = 2.63\,\mathrm{pc} = 8.6\,\mathrm{sv.let} = 8.1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}.$$

2. Dnevna paralaksa Sonca je $p_\odot = 8.8''$. Izračunaj razdaljo med Zemljo in Soncem, če veš, da je polmer Zemplje $R_Z = 6400$ km.

   Rešitev:

   $$p_\odot = \frac{R_Z}{d_\odot} \Rightarrow d_\odot = \frac{R_Z}{p_\odot} = \frac{6400\,\mathrm{km}}{4.3 \cdot 10^{-5}} = 150.01 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

3. Zvezda Sirij sije z magnitudo $m = -1.6^m$ in je oddaljena 8.8 sv. let. Kolikšna je njena absolutna magnituda in kolikšen je njen izsev v primerjavi s Soncem? Absolutna magnituda Sonca je $M_\odot = 4.6$.

   Rešitev: Absolutna magnituda Sirija je:

   $$M = m - 5\log_{10}\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} = m - 5\log_{10}\frac{8.8/3.26\,\mathrm{pc}}{10\,\mathrm{pc}} = -1.24\,\mathrm{mag}.$$

   Iz primerjave absolutnih magnitud (na enakih oddaljenostih obeh zvezd) dobimo razmerje izsevov Sirija in Sonca:

$$\frac{L_S}{L_\odot} = \frac{j_S}{j_\odot} = 10^{-0.4(M_S - M_\odot)} = 22.1$$

4. Sonce ima na oddaljenosti $d_\odot = 1$ a. e. navidezno magnitudo $m_\odot = -26.9^m$, Spika pa na oddaljenosti $d_S = 260$ sv. let navidezno magnitudo $m_S = 1.04^m$. Katera zvezda je v resnici svetlejša?

   Rešitev:
   Izračunajmo navidezno magnitudo, ki bi jo imelo Sonce, če bi bilo na oddaljenosti Spike:

   $$m'_\odot = m_\odot + 5\log_{10}\frac{d_S}{d_\odot} = -26.9 + 36.1 = 9.2^m.$$

   Vidimo, da je Sonce šibkejša zvezda kot Spika. Razmerje njunih gostot svetlobnega toka pa je $j_S/j_\odot = 10^{-0.4(m_S - m'_\odot)} = 1840$.
5. Sonce ima navidezno magnitudo $m = -26.81^m$. Kolikšna je njegova absolutna magnituda? Kolikšna bi bila njegova navidezna magnituda, če bi bilo oddaljeno $d = 1$ kpc?

   Rešitev:
   Absolutna magnituda Sonca je:

   $$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\frac{j_1}{j_2} \Rightarrow m - M = 5\log_{10}\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \tag{49}$$

   $$M = m - 5\log_{10}\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} = -26.81 - 5\log_{10}\frac{1a.e.}{10\,\mathrm{pc}} = 4.76 \tag{50}$$

   Navidezna magnituda Sonca na razdalji $d = 1$ kpc je:

   $$m' = M + 5\log_{10}\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} = 4.76 + 5\log_{10}100 = 14.76\,\mathrm{mag}$$

6. V oddaljeni galaksiji eksplodira supernova, ki ima največji izsev enak $L = 10^{10}L_\odot$. Koliko je lahko največ oddaljena ta galaksija, da bomo supernovo lahko opazili s prostim očesom? Predpostavimo, da ustreza mejna gostota svetlobnega toka, ki ga oko še zazna, magnitudi 6^m in da se nič svetlobe ne absorbira na poti od supernove do nas. Vemo še, da je izsev Sonca $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ W, oddaljenost $d_\odot = 1$ a.e. in navidezna magnituda Sonca $m_\odot = -26.81^m$.

Rešitev:
Primerjajmo gostoti svetlobnega toka s Sonca in s supernove:

$$j_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2} \tag{51}$$

$$j_{sup} = \frac{L_{sup}}{4\pi d_{sup}^2} = \frac{10^{10} L_\odot}{4\pi d_{sup}^2} \tag{52}$$

$$m_\odot - m_{sup} = -2.5 \log_{10} \frac{j_\odot}{j_{sup}} = -5 \log_{10}\left(\frac{d_{sup}}{10^5 d_\odot}\right) \tag{53}$$

Obrnemo enačbo, da izrazimo d_{sup} in upošetavmo, da je $m_{sup} = 6^m$:

$$d_{sup} = 10^5 d_\odot \cdot 10^{\frac{m_{sup}-m_\odot}{5}} = 5.47 \cdot 10^{22}\,\mathrm{m} = 5.8\mathrm{Msv.let}$$

7. Nam najbližja zvezda (razen Sonca) je Proksima Kentavra, ki je oddaljena 4.2 sv. let. V primerjavi s Soncem je 10.000-krat šibkejša.
   a) Kolikšna je njena absolutna magnituda, če veš, da je absolutna magnituda Sonca $M_\odot$=4.8?
   b) Kolikšna je njena navidezna magnituda?
   c) Kolikšna je letna paralaksa te zvezde?

Rešitev:
a) Primerjamo absolutni magnitudi Sonca in Proksime Kentavra:

$$M_{PK} - M_\odot = -2.5 \log_{10} \frac{P_{PK}}{P_\odot} \tag{54}$$

$$M_{PK} = M_\odot - 2.5 \log_{10}(10^{-4}) = M_\odot + 10 = 14.8\,\mathrm{mag} \tag{55}$$

b) Absolutna magnituda zvezde je njena magnituda na razdalji 10 pc, navidezna magnituda pa magnituda na njeni pravi razdalji $d = 4.26$ sv. let $= \frac{4.2\,\mathrm{sv.let}}{3.26\,\mathrm{sv.let/pc}} = 1.29\,\mathrm{pc}$:

$$m - M = -2.5 \log_{10} \frac{(10\,pc)^2}{d^2} = 5 \log_{10} \frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \tag{56}$$

$$m = M + 5 \log_{10}\left(\frac{1.29\,\mathrm{pc}}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 10.35\,\mathrm{mag} \tag{57}$$

c) Paralaksa je kot: $p = \frac{1a.e.}{d}$ ali izražen v kotnih sekundah:

$$p'' = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3600'' \cdot \frac{1a.e.}{d} = \frac{1}{d[\mathrm{pc}]} = 0.78''$$

8. Zapiši razliko magnitud dveh zvezd, ki sta oddaljeni d_1 in d_2, imata polmer $R_{*,1}$ in $R_{*,2}$ ter površinski temperaturi T_1 in T_2! Predpostavi, da svetita kot črni telesi. Kolikšna je razlika magnitud med zvezdama, če velja: $d_1 = 2d_2, T_1 = 2T_2, R_{*,1} = R_{*,2}$? Kaj lahko poveš o radijih in oddaljenostih dveh zvezd, ki sta videti enako svetli in imata enako površinsko temperaturo?

   Rešitev:
   Pogsonov zakon pravi, da je razmerje gostote svetlobnih tokov:

$$\frac{j_1}{j_2} = 10^{-0.4(m_1-m_2)} \Rightarrow m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{j_1}{j_2} \tag{58}$$

   Gostota svetlobnega toka na površini zvezde je $j_* = \sigma T^4$, kjer je σ Boltzmannova konstanta. Svetlobni tok ali izsev, ki ga oddaja zvezda je $L = j_* S_* = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_*^2$. Na oddaljenosti d je gostota svetlobnega toka zvezde $j = L/4\pi d^2$. Ob upoštevanju tega, zapišemo razliko magnitud:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\Big(\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{4\pi d_2^2}{4\pi d_1^2}\Big) \tag{59}$$

$$= -2.5 \log_{10}\Big(\frac{\sigma T_1^4 \cdot 4\pi R_{*,1}^2}{\sigma T_2^4 \cdot 4\pi R_{*,2}^2} \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2}\Big) \tag{60}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{T_1^4}{T_2^4} - 2.5 \log_{10} \frac{R_{*,1}^2}{R_{*,2}^2} - 2.5 \log_{10} \frac{d_2^2}{d_1^2} \tag{61}$$

$$m_1 - m_2 = -10 \log_{10} \frac{T_1}{T_2} - 5 \log_{10} \frac{R_{*,1}}{R_{*,2}} + 5 \log_{10} \frac{d_1}{d_2} \tag{62}$$

   Razlika magnitud med omenjenima zvezdama je: $m_1 - m_2 = 3.0$.
   Če sta zvezdi videti enako svetli ($m_1 - m_2 = 0$) in imata enako površinsko temperaturo, sledi, da je: $R_{*,2} d_1 = R_{*,1} d_2$ ali $\frac{R_{*,1}}{R_{*,2}} = \frac{d_1}{d_2}$. Razmerje njunih polmerov je enako razmerju njunih oddaljenosti.

9. Zvezda ima navidezno magnitudo m=5 in letno paralakso p=0.25". Kolikšna je njena absolutna magnituda? Iz njenega spektra so ugotovili, da znaša temperatura na njeni površini 4500 K. Kolikšen je polmer zvezde, če predpostavimo, da sveti kot črno telo?
   Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \mathrm{JK^{-4}m^{-2}s^{-1}}$, za Sonce pa vemo:
   - $\mathrm{m_{Sonca}} = -26.81$,
   - $\mathrm{L_\odot} = 3.8 \cdot 10^{26}\mathrm{W}$,
   - oddaljenost Sonca je $d_\odot = 1$ a.e. $= 1.5 \cdot 10^{11}$m.

   Rešitev:

Najprej iz paralakse izračunamo oddaljenost zvezde: $d = \frac{1\,\mathrm{pc}}{p''} = 4\,\mathrm{pc}$. Absolutna magnituda zvezde je magnituda, ki bi jo zvezda imela, če bi bila na oddaljenosti 10 pc:

$$M = m + 5\log_{10}\frac{10\,\mathrm{pc}}{d} = 5 + 5\log\frac{10\,\mathrm{pc}}{4\,\mathrm{pc}} = 7.0.$$

Gostota svetlobnega toka s te zvezde (če predpostavimo, da je krogla, ki sveti kot črno telo) je:

$$j_* = \frac{L_*}{4\pi d_*^2} = \frac{\sigma T_*^4 \cdot 4\pi R_*^2}{4\pi d_*^2} = \frac{\sigma T_*^4 \cdot R_*^2}{d_*^2}$$

Podobno zapišemo za Sonce:

$$j_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}.$$

Razlika navideznih magnitud Sonca in zvezde je:

$$m_\odot - m_* = -2.5\log_{10}\frac{j_\odot}{j_*} = -2.5\log\frac{L_\odot d_*^2}{4\pi d_\odot^2 \sigma T_*^4 R_*^2}$$

ali, če izrazimo radij zvezde:

$$R_* = \frac{d_*}{d_\odot}\sqrt{\frac{L_\odot}{4\pi\sigma}\frac{1}{T_*^2}} \cdot 10^{\frac{m_\odot - m_*}{5}} = 4.1\cdot 10^8\,\mathrm{m} = 410\,000\,\mathrm{km}.$$

10. Skozi filter B in V opazujemo Sonce. Središčni valovni dolžini teh filtrov sta λ_B =440 nm in λ_V =550 nm, njuna širina pa $\Delta\lambda = 100$ nm. Kolikšno je pričakovano razmerje gostote svetlobnih tokov j_B/j_V, če predpostavimo, da sveti Sonce kot črno telo s površinsko temperaturo $T_\odot$=6000 K? Kolikšen pa je pričakovani barvni index $B-V$ za Sonce, če je po dogovoru za zvezdo Vega, ki ima T=9500 K, $B-V$=0.

3 Teleskopi

1. S teleskopom s premerom D=2 m opazujemo Soncu podobno zvezdo v kroglasti kopici, ki je oddaljena d =8 kpc. Opazujemo s filtrom V

(λ_V=550 nm, $\Delta\lambda$= 100 nm). Koliko fotonov na sekundo ujamemo? Opazujemo še druge zvezde v tej kopici. Oceni kolikšna mora biti masa zvezde na glavni veji, da ujamemo vsaj 1 njen foton na sekundo ? Uporabi priloženi H-R diagram. Rešitev:

Število fotonov pri določeni valovni dolžini λ, ki jih ujamemo na sekundo, je gostota svetlobnega toka pri tej valovni dolžini dj_λ deljeno z energijo posameznega fotona $h\nu = hc/\lambda$ in pomnoženo s površino vstopne odprtine teleksopa: $S = \frac{\pi D^2}{4}$:

$$\frac{N_\gamma}{t} = \frac{dj_\lambda}{\frac{hc}{\lambda}} \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

Predpostavimo, da zvezda sveti kot črno telo. Gostota svetlobnega toka pri λ v intervalu širine $d\lambda$ na njeni površini je:

$$dj_{\lambda,*} = \frac{2hc^2}{\lambda^5(exp\frac{hc}{kT\lambda} - 1)} d\lambda$$

Svetlobni tok je $dP_\lambda = dj_{\lambda,*} 4\pi R_*^2$, gostota svetlobnega toka pri nas pa $dj_\lambda = dP_\lambda / 4\pi d^2$. Da dobimo celoten svetlobni tok, ki ga prepušča filter moramo integrirati dj_λ po λ v območju filtra. Ker je naš filter precej ozek, $\Delta\lambda = 100$ nm, bomo namesto integrala izračunali kar: povprečna vrednost krat širina intervala, $\bar{j}\Delta\lambda$. Z vrednostmi za Sonce dobimo:

$$\frac{N_\gamma}{t} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{R_*^2}{d^2} \frac{2c\Delta\lambda}{\lambda^4(exp\frac{hc}{kT\lambda} - 1)} = 213\,(670).$$

Ocenimo: da dobimo le 1 foton na sekundo, mora biti absolutna magnituda zvezde za: $\Delta M = -2,5 \log_{10} 213\,(670) = 5,8\,(7)$ višja od Sončeve, ki je $M_V = 4.8$. Iz priloženega HR diagrama razberemo, da ima takšna zvezda maso nekoliko pod 0,5 $M_\odot$.

4 Tiri, Keplerjevi zakoni, dvojne zvezde

1. Izračunaj maso Sonca, če veš, da je obhodni čas Zemlje okoli Sonca $P = 1$ leto, njena oddaljenost pa $a = 1$ a.e. (150 milijonov kilometrov)!

   Rešitev:
   Tretji Keplerjev zakon je pomemben za določanje mase Sonca!

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_\odot + M_{planet})}{4\pi^2} \approx \frac{GM_\odot}{4\pi^2}$$

Sledi:

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} = 2.0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

2. Izračunaj maso Zemlje, če veš, da je obhodni čas Lune okoli zemlje $P = 27.32$ dni, njena oddaljenost pa $a = 384000$ km!

Rešitev:
Enako kot pri prejšnji nalogi uporabimo tretji Keplerjev zakon:

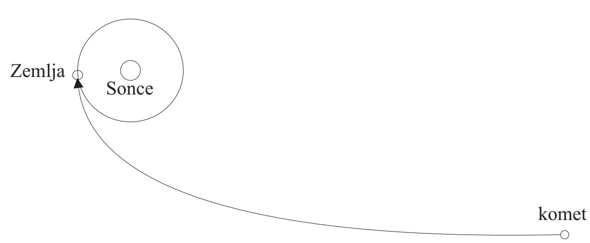
$$M_Z = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} = 6.0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

3. Izračunaj maso Jupitra, če veš, da je obhodni čas njegove lune Io okoli Jupitra $P = 1.77$ dni, njena oddaljenost pa $a = 4.22 \cdot 10^8$ m!

Rešitev:
Enako kot pri prejšnjih dveh nalogah uporabimo tretji Keplerjev zakon:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} = 1.9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg} = 318 M_Z$$

4. Za koliko bi se spremenilo leto na Zemlji, če bi vanjo v smeri gibanja okoli Sonca treščil komet, ki bi prišel iz velike oddaljenosti od Sonca ter bi imel premer R_k =100 km in gostoto $\varrho = 1\mathrm{g/cm}^3$? Predpostavi, da je Zemeljski tir okoli Sonca krožnica ter upoštevaj ohranitev gibalne količine pri trku!



Rešitev:

Najprej izračunamo maso kometa: $m_k = \frac{4\pi}{3} R_k^3 \cdot \varrho = 5.24 \cdot 10^{17}$ kg. Hitrost kometa tik pred trkom dobimo iz ohranitve celotne energije (zanemarimo vpliv Zemlje na gibanje kometa in upoštevamo samp vpliv Sonca):

$$W_{cel}^{komet} = W_{kin} + W_{pot} = \frac{1}{2} m_k v_k^2 - \frac{GM_\odot m_k}{d_k} = 0,$$

kjer je d_k oddaljenost kometa od Sonca. V zadnjem koraku smo upoštevali, da gre pri $d_k \to \infty$, hitrost kometa proti nič in tudi njegova potencialna energija gre proti nič. Dobimo hitrost kometa tik pred trkom v Zemljo:

$$v_k = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{1\,\text{a.e.}}} = 42.17\,\text{kms}^{-1}.$$

Hitrost kroženja Zemlje okrog Sonca pred trkom dobimo iz:

$$\frac{M_Z v_Z^2}{a_Z} = \frac{GM_\odot M_Z}{a_Z^2} \Rightarrow v_Z = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z}} = 29.82\,\text{kms}^{-1}. \tag{63}$$

Ob trku se ohranja skupna gibalna količina kometa in Zemlje:

$$M_Z v_Z + m_k v_k = (M_Z + m_k) v'_Z.$$

Hitrost Zemlje (skupaj s kometom) po trku je:

$$v'_Z = \frac{M_Z v_Z + m_k v_k}{M_Z + m_k} \approx v_Z + \frac{m_k}{M_Z} v_k, \tag{64}$$

kjer lahko zanemarimo m_k v imenovalcu, saj je $\frac{m_k}{M_Z} = 9 \cdot 10^{-8}$. Iz istega razloga vidimo, da bo popravek Zemljine hitrosti $\frac{m_k}{M_Z} v_k = 3.7\,\text{mms}^{-1}$, majhen. Računajmo z majhnimi popravki:

$$\frac{\Delta v_Z}{v_Z} = \sqrt{2} \cdot \frac{m_k}{M_Z} = 1.23 \cdot 10^{-7},$$

kjer lahko upoštevamo, da je $v_Z = \sqrt{2} v_k$ (glej zgoraj), ni pa nujno (?). Če predpostavimo, da je tir Zemlje še naprej krožnica, lahko iz enačbe 4 vidimo, da sprememba hitrosti Zemlje povzroči spremembo polmera zemljine tirnice a_Z:

$$\frac{\Delta a_Z}{a_Z} = -2 \frac{\Delta v_Z}{v_Z}$$

kar po drugem Keplerjevem zakonu a_Z^3 / P^2 =konst. pomeni, da se spremeni tudi orbitalna perioda oz. dolžina leta na Zemlji:

$$\frac{\Delta P_Z}{P_Z} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a_Z}{a_Z} = -3 \frac{\Delta v_Z}{v_Z}.$$

Z zgornjimi številkami dobimo: $\frac{\Delta P_Z}{P_Z} = -3.7 \cdot 10^{-7}$ ali , da se dolžina leta na Zemlji skrajša za $\Delta P_Z = -11.7$ s.
Ta račun je sicer primeren za oceno velikosti spremembe periode, ni pa pravilen! S predpostavko, da je tir še naprej krožnica smo privzeli, da Zemlja "preskoči" s tirnice s polmerom a_Z na tirnico s polmerom a'_Z. To ni res. Če hočemo izračunati spremembo dolžine leta bolj pravilno in natančno, moramo upoštevali, da tir Zemlje po trku ni več krožnica ampak je elipsa. Upoštevamo, da je celotna energija telesa na tirnici z veliko polosjo a enaka:

$$E = -\frac{GM_\odot m}{2a}.$$

Energijski zakon pravi: skupna kinetična energija po trku + skupna potencialna energija (oboje v točki trka, t.j. a_Z) = celotna energija (na tiru z veliko polosjo a'_Z):

$$E_{Z+komet} = \frac{1}{2}(M_Z + m_k)v'^2_Z - \frac{GM_\odot(M_Z + m_k)}{a_Z} = -\frac{GM_\odot(M_Z + m_k)}{2a'_Z}$$

Vstavimo v'_Z iz 4 in dobimo:

$$\frac{1}{a'_Z} = \frac{2}{a_Z} - \frac{1}{a_Z}\left(\frac{1 + \frac{m_k v_k}{M_Z v_Z}}{1 + \frac{m_k}{M_Z}}\right)^2$$

Upoštevamo $\frac{m_k}{M_Z} << 1$ in razvijemo:

$$\frac{1}{a'_Z} \approx \frac{2}{a_Z} - \frac{1}{a_Z}\left(1 + 2\frac{m_k v_k}{M_Z v_Z}\right)\left(1 - 2\frac{m_k}{M_Z}\right) \approx \frac{1}{a_Z} - \frac{1}{a_Z}\frac{2m_k}{M_Z}(\frac{v_k}{v_Z} - 1)$$

Dobimo:

$$\frac{\Delta a_Z}{a_Z} \approx \frac{2m_k}{M_Z}(\frac{v_k}{v_Z} - 1) = 6.9 \cdot 10^{-8} \tag{65}$$

$$\frac{\Delta P_Z}{P_Z} = \frac{3}{2}\frac{\Delta a_Z}{a_Z} = 1.0 \cdot 10^{-7} \tag{66}$$

kar znese, da se dolžina leta podaljša za 3.3 s.

5. Pluton se giblje okrog Sonca po orbiti, ki ima perihelij pri r_p =29.7 a.e. in afelij pri r_a =49.3 a.e.. Kolikšni sta velika polos in ekscentričnost njegovega tira? Kolišen je obhodni čas okrog Sonca? Kolikšni sta največja in najmanjša hitrost Plutona na tem tiru?

Rešitev:
Spomnimo se, da velja za eliptične tire:

$$r_p = a(1-\epsilon) \tag{67}$$
$$r_a = a(1+\epsilon) \tag{68}$$

ali:

$$r_p + r_a = 2a \tag{69}$$
$$r_p - r_a = -2a\epsilon \tag{70}$$
$$\epsilon = \frac{r_a - r_p}{r_p + r_a} \tag{71}$$
$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \tag{72}$$

pri čemer je a glavna polos in ϵ sploščenost tira.
Za primer Plutona izračunamo:

$$a_P = \frac{r_p + r_a}{2} = 39.5\,\text{a.e.} \tag{73}$$
$$\epsilon_P = \frac{r_a - r_p}{r_p + r_a} = 0.248 \tag{74}$$

Tretji Keplerjev zakon nam pove:

$$\frac{GM_\odot}{4\pi^2} = \frac{a_P^3}{P_P^2} = \frac{a_Z^3}{P_Z^2},$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali, da velja tudi za Zemljin tir okoli Sonca. Izrazimo periodo Plutona:

$$P_P = P_Z\Big(\frac{a_P}{a_Z}\Big)^{\frac{3}{2}} = 1\,\text{leto}\cdot\Big(\frac{39.5\,\text{a.e.}}{1\,\text{a.e.}}\Big)^{\frac{3}{2}} = 248.25\,\text{let}$$

Upoštevamo drugi keplerjev zakon, ki pravi, da je ploščinska hitrost konstantna: $r_p v_p = r_a v_a$. Izrazimo na primer hitrost v periastronu kot: $v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a$. Zapišemo energijski zakon (celotna energija je sestavljena iz kinetične in potencialne, $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ je reducirana masa sistema (?)), ki pravi, da se celotna energija ohranja. V periastronu in afeliju tako velja:

$$\frac{1}{2}\mu v_p^2 - \frac{GM\mu}{r_p} = \frac{1}{2}\mu v_a^2 - \frac{GM\mu}{r_a}.$$

Upoštevamo zvezo med v_p in v_a ter kaj je ϵ in dobimo:

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = 3.7\,\text{kms}^{-1} \tag{75}$$
$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = 6.1\,\text{kms}^{-1} \tag{76}$$

6. Iz tabel preberemo, da ima planet Mars veliko polos tira $a = 1.5237$ a.e. in ekscentričnost tira $\epsilon = 0.0934$. Kolikšna je njegova oddaljenost v periheliju in kolikšna v afeliju? Za koliko odstotkov se razlikujeta?

   Rešitev:
   Iz izrazov 5 dobimo:

$$r_p = a(1-\epsilon) = 1.3814\,\text{a.e.} \tag{77}$$

$$r_a = a(1+\epsilon) = 1.6660\,\text{a.e.} \tag{78}$$

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}} = \frac{r_a - r_p}{(r_a + r_p)/2} = \frac{2\epsilon a}{a} = 2\epsilon = 0.187 \tag{79}$$

7. Prekrivalni dvojni sistem zvezd je oddaljen d =5 kpc. Veliki polosi elips sta $\alpha_1 = 8\cdot 10^{-3}$ " in $\alpha_2 = 2\cdot 10^{-3}$ ", perioda gibanja pa 158 let. Izmerili so, da svetlejša zvezda potuje čez rob šibkejše t_1 =50 ur in jo v celoti zakriva t_2 =120 ur. Kolikšni sta masi in polmera zvezd? Iz spektrov so ugotovili, da je temperatura šibkejše zvezde $T_1 = 6000$ K in temperatura svetlejše $T_2 = 10.000$ K. Kolikšna je magnituda sistema, ko ni mrka, in kolikšna med primarnim in sekundarnim mrkom? Navidezna magnituda Sonca je $m_\odot = -27$.

   Rešitev:
   V dvojnem sistemu velja:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} = 4 \tag{80}$$

   Velika polos sistema je $a = a_1 + a_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)d = 7,48\cdot 10^{12}$ m= 50 a.e. Iz Tretjega Keplerjevega zakona izračunamo skupno maso $M = M_1 + M_2$. Za lažje računanje uporabimo podatke za Zemljo in zapišemo za Zemljo in obravnavani sistem:

$$\frac{G}{4\pi^2} = \frac{a_Z^3}{P_Z^2 M_\odot} = \frac{a^3}{P^2 M}.$$

   Sledi, da je $M = (\frac{a}{a_Z})^3(\frac{P_Z}{P})^2 M_\odot = 5M_\odot$. To in enačba 7 nam da masi zvezd: $M_1 = 1M_\odot, M_2 = 4M_\odot$.
   Polmere določimo iz podatkov o trajanju mrka. Ker je $M_2 > M_1$ lahko pričakujemo, da zvezda 2 svetlejša. Iz podatka, da svetlejša zvezda v celoti zakriva šibkejšo, sklepamo, da je $R_2 > R_1$. Relativna hitrost zvezd (ene glede na drugo) je: $v = v_1 + v_2 = \frac{2\pi a}{P} = 9460$ m/s, kjer smo v predzadnjem koraku privzeli, da se gibljeta po krožnicah. Iz t_1, časa potovanja svetlejše zvezde čez rob šibkejše, dobimo polmer šibkejše zvezde: $v = \frac{2R_1}{t_1} \Rightarrow R_1 =$

$\frac{vt_1}{2} = 8,5 \cdot 10^8$ m$= 1,2R_\odot$. Polmer večje zvezde dobimo iz naslednjega razmisleka: da se večja zvezda premakne za $2R_2$, traja t_2 (čas popolnega zakrivanja) plus t_1 čas potovanja čez rob. Sledi, da je: $R_2 = \frac{v(t_1+t_2)}{2} = 2,9 \cdot 10^9$ m$= 4,1R_\odot$.
Izračunajmo gostoto svetlobnih tokov s posamezne zvezde, pri tem privzamemo, da svetita kot črni telesi:

$$j_1 = \frac{P_1}{4\pi d^2} = \frac{\sigma T_1^4 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi d^2} = \sigma T_1^4 \Big(\frac{R_1}{d}\Big)^2 = 2,24 \cdot 10^{-15}\, W/m^2 \quad (81)$$

$$j_2 = \sigma T_2^4 \Big(\frac{R_2}{d}\Big)^2 = 9,56 \cdot 10^{-14}\, W/m^2 \quad (82)$$

Za Sonce vemo, da ima navidezno magnitudo $m_\odot = -26,8$, polmer $7 \cdot 10^8$ m, površinsko temperaturo okrog 6000 K in je na razdalji 1 a.e. Gostota svetlobnega toka s Sonca je:

$$j_\odot = \sigma T_\odot^4 \Big(\frac{R_\odot}{1\,\text{a.e.}}\Big)^2 = 1600\, W/m^2 \quad (83)$$

Sedaj izračunamo skupno magnitudo zvezd z uporabo Pogsonovega zakona in vrednostmi za Sonce. Opozorilo: magnitude posameznih zvezd ne smemo kar sešteti! Seštevajo se gostote svetlobnih tokov:

$$j_{skup} = j_1 + j_2 = 9,79 \cdot 10^{-14}\, W/m^2 \quad (84)$$

$$m_{skup} = M_V - 2,5 \log_{10} \frac{j_{skup}}{j_\odot} = M_V + 40,5 = 13,53 \quad (85)$$

Ko večja zvezda zakrije manjšo je sekundarni mrk in takrat prejemamo le j_2, magnituda pa je :

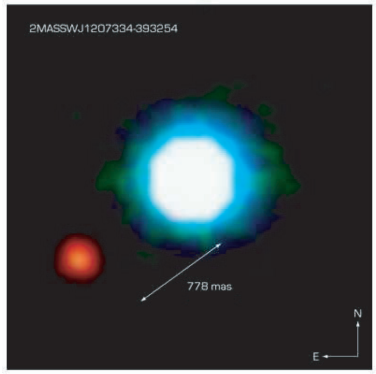
$$m_{mrk,sek} = M_V - 2,5 \log_{10} \frac{j_2}{j_\odot} = 13,56.$$

V primarnem mrku manjša zvezda zakrije večjo, bolj vročo. Skupna gostota svetlobnega toka in magnituda sta:

$$j'_{skup} = j_1 + j'_2 = j_1 + \frac{\sigma T_2^4}{d^2}(R_2^2 - R_1^2) = 8,06 \cdot 10^{-14}\, \mathrm{W/m^2} \quad (86)$$

$$m_{mrk,prim} = M_V - 2,5 \log_{10} \frac{j_{skup'}}{j_\odot} = 13,74 \quad (87)$$

8. V sistemu 2M1207, ki je od nas addaljen $d = 60$ pc, so prvič neposredno videli planet zunaj našega Osončja (glej sliko). Ugotovili so, da se okrog rjave pritlikavke z maso $M_* = 0.025 M_\odot$ giblje planet z maso pet Jupitrovih mas ($M_{Jup} = 318 M_{Zemlje}$), razdaljo med njima pa vidimo pod kotom $\alpha = 778$ mili ločnih sekund. Predpostavi, da zvezda in planet krožita



NACO Image of the Brown Dwarf Object 2M1207 and GPCC

ESO PR Photo 26a/04 (10 September 2004) © European Southern Observatory

okrog skupnega težišča in da so ju fotografirali, ko sta bila najbolj oddaljena. Izračunaj: a) kolikšna je perioda njunega gibanja? b) s kakšno hitrostjo se giblje zvezda in s kakšno hitrostjo planet?

Rešitev:

$$M_* = 0.025 M_\odot = 5 \cdot 10^{28} kg \tag{88}$$
$$M_p = 5 M_J = 1590 M_Z = 9.54 \cdot 10^{27} kg \tag{89}$$

Vsota velikih polosi sistema je:

$$a = a_1 + a_2 = \alpha \cdot d = 778 \cdot 10^{-3} \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 60 \cdot 3.08 \cdot 10^{16}\mathrm{m} = 6.98 \cdot 10^{12}\mathrm{m}$$

a) Tretji Keplerjev zakon pravi:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{(M_* + M_p)} = 3.38 \cdot 10^{21}\,\mathrm{s} \Rightarrow P = 5.81 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} = 1844\,\mathrm{let}$$

b) Ob predpostavki, da zvezda in planet krožita, lahko zapišemo, da je perioda oziroma hitrost kroženja(?):

$$P = \frac{2\pi a}{v_* + v_p} \Rightarrow v_* + v_p = \frac{2\pi a}{P} = 754.8\,\mathrm{ms}^{-1}.$$

V težiščnem sistemu je: $\frac{m_*}{m_p} = \frac{v_p}{v_*}$ in sledi:

$$v_* = \frac{v_* + v_p}{1 + \frac{m_*}{m_p}} = 121\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{90}$$
$$v_p = \frac{m_*}{m_p} v_* = 634\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{91}$$

5 Zgradba zvezd

1. Oceni gravitacijsko potencialno energijo Sonca. Računaj, kot da bi bilo Sonce homogena krogla (z gostoto $\varrho_0 = 3M_\odot/4\pi R_\odot^3$). d tod izračunaj termično energijo Sonca E_T, od tod pa termični karakteristični čas $t_T = E_T/L_\odot$.

   Rešitev:

   $$\varrho_0 = 3M_\odot/4\pi R_\odot^3 = 1400\,\mathrm{kgm}^{-3}$$

   Sonce/homogeno kroglo v mislih razdelimo na koncentrične lupine, ki imajo maso $dm = \varrho_0 dV = \varrho_0 4\pi r^2 dr$, znotraj njih pa je masa $M(r) = \varrho_0 \frac{4\pi}{3} r^3$. Potencialna energija posamezne lupine je:

   $$dW_{pot} = -\frac{GM(r)dm}{r} = -\frac{G(4\pi\varrho_0)^2}{3} r^4 dr.$$

   Integriramo po r po celotni krogli:

   $$W_{pot} = -\frac{G(4\pi\varrho_0)^2}{3}\int_0^{R_\odot} r^4 dr = -\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot} = 2.3\cdot 10^{41}\ \mathrm{J}.$$

   Iz virialnega teorema vemo, da je: $E_T = -\frac{1}{2}W_{pot} = 1.1\cdot 10^{41}$ J. Če bi v Soncu ugasnile jedrske reakcije, bi na račun oddajanja svoje termične energije lahko svetilo z današnjim izsevom $L_\odot = 4\cdot 10^{26}$ W še termični čas:

   $$t_T = \frac{E_T}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{10R_\odot L_\odot} = 2.9\cdot 10^{14}\,\mathrm{s} = 9\cdot 10^6\,\mathrm{let}$$

2. Iz enačbe hidrostatičnega ravnovesja oceni debelino Zemljine atmosfere! Oceni pri kolikšnem temperaturnem gradientu se v Zemljini atmosferi razvije konvekcija!
   Masa Zemlje je $\mathrm{M_Z} = 6\cdot 10^{24}$ kg, polmer Zemlje je $\mathrm{R_Z} = 6400$ km, gostota zraka pri tleh je $\varrho = 1.27$ kg/m^3, tlak pri tleh je p = 10^5 Pa, kilomolska masa zraka je 29 kg, razmerje specifičnih toplot pa je $\gamma = 1.4$.

3. Izpelji zvezo med povprečno in središčno gostoto zvezde, ki jo opišemo s politropnim modelom (s splošnim indeksom γ)! Izračunaj središčno in povprečno gostoto bele pritlikavke, ki ima $\gamma = 5/3$ in polmer 10000 km! Za $\gamma = 5/3$ je prva ničla funkcije θ enaka $x_0 = 3,65375$ in $(-x_0^2\frac{d\theta}{dx})\big|_{x=x_0} = 2,71406$.

4. Zvezdo z radijem $R_\odot$ in maso $M_\odot$ opišemo s politropnim modelom z n=1.5, za katerega preberemo iz tabel, da je prva ničla funkcije Θ enaka $x_1 = 3.654$ in $(-x_1^2 \frac{d\Theta}{dx})_{x=x_1} = 2.714$.
Kolišna je gostota v središču te zvezde? Kolikšen je tlak v središču? Predpostavimo še, da je zvezda sestavljena iz idealnega plina ioniziranega vodika ($\bar{\mu} = 0.5$). Kolikšna je temperatura v središču?

5. Izpelji zvezo med povprečno in središčno gostoto zvezde, ki jo opišemo s politropnim modelom z indeksom γ!
Izračunaj povprečno in središčno gostoto bele pritlikavke, ki ima polmer 10.000 km in $\gamma = 5/3$ (za ta γ je $x_0 = 3.65375$ in $\left(-x_0^2 \frac{d\theta}{dx}\right)_{x=x_0} = 2.71406$).

6. Na sliki je prikazana zveza med polmerom in maso nevtronskih zvezd. Iz slike oceni, kateri politropni model (s katerim politropnim indeksom) najbolje opisuje nevtronsko zvezdo z maso $1,3M_\odot$! Ustrezni politropni model naj čimbolje lokalno opisuje relacijo R-M.

6 Razvoj zvezd

1. Oblak atomarnega vodika ima M = 1000 $M_\odot$, T = 100 K in n = 10^4 cm^{-3}.
Kolikšna je Jeansova masa za ta oblak?
Oblak se začne izotermno krčiti. Pri katerem n (številu delcev na enoto volumna) se bo fragmentiral v dele z maso 10 $M_\odot$?
Koliko (gravitacijske vezavne) energije bo do te točke že oddal? (Predpostavi, da je oblak homogen, t.j. gostota oblaka je povsod enaka.)

2. Leta 1987 je 50 kpc od nas eksplodirala supernova SN1987A. Pri tem se je jedro zvezde sesedlo v nevtronsko zvezdo z maso približno $M_\odot$. Oceni število nevtrinov, ki so nastali pri tej eksploziji! Oceni število nevtrinov, ki bi jih zaznal detektor s 400 m^3 vode, če je sipalni presek za reakcijo

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

$\sigma = 6.5 \cdot 10^{-45}$ m^2!

7 Razno

1. Območje Stromgrenove sfere v meglici Rossette, ki je od nas oddaljena 5200 svetlobnih let, vidimo pod kotom 1.3°. Kolikšen je premer sfere? Iz ocene, da je v njej za okrog $10^4 M_\odot$ vodika, izračunaj številsko gostoto vodika n_H!
   V središču sfere se nahaja skupina zvezd spektralnih tipov O in B, ki povzročajo ionizacijo vodika v meglici. Pri katerih valovnih dolžinah te zvezde največ svetijo, če je njihova površinska temperatura okrog 30.000 K? Vzami prej izračunano številsko gostoto vodika in verjetnost za rekombinacijo elektronov in protonov $\alpha = 3 \cdot 10^{-19} m^3 s^{-1}$ ter oceni kolikšen je skupen izsev zvezd O in B!

2. Sredi območja nevtralnega vodika s številsko gostoto atomov n_H se vžge mlada zvezda, ki odda N_γ fotonov z energijo nad ionizacijsko energijo vodika na enoto časa. Okrog nje se vzpostavi Stromgrenova sfera z radijem r_s. Vendar se Stromgrenova sfera ne vzpostavi v trenutku. Predpostavi, da je trenutni radij krogle r in napiši diferencialno enačbo za r. Z uporabo substitucije $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ reši diferencialno enačbo. Rešitev zapiši kot: $r(t) = r_s f(t)$.

3. Henrietta Leavitt je odkrila zvezo med periodo in izsevom kefeid. Prva slika na priloženem listu prikazuje njen diagram navidezne magnitude m, absolutne magnitude M in periode za kefeide v Majhnem Magellanovem oblaku. Druga slika pa prikazuje sodobne meritve zveze med absolutno magnitudo in periodo za več galaksij. Kako si razlagaš razliko med vrednostmi absolutnih magnitud na obeh grafih: kaj je ga. Leavitt zgrešila in kaj je pravi odgovor/vrednost? Zveza med absolutno magnitudo in periodo je $M = -2.80\ Log_{10} P_{(d)} - 1.43$ (kjer je $P_{(d)}$ perioda v dnevih).

4. Aktivna galaktična jedra imajo polmere okrog enega svetlobnega meseca in mase do $10^9 M_\odot$. Po eni razlagi so to kopice masivnih zvezd. Oceni kolikšen bi bil povprečen čas med trkoma dveh zvezd v takšni kopici, če imajo zvezde povprečno maso $10 M_\odot$ in povprečno hitrost 200 km/s! (Trk naj se zgodi, če se zvezdi približata na razdaljo, kjer je potencialna energija ene zvezde v gravitacijskem polju druge, enaka njeni kinetični energiji.)
   Primerjaj dobljeno oceno z oceno za povprečni čas med trkoma dveh zvezd v disku Galaksije! Disk naj ima debelino 2000 sv. let, polmer 30000 sv. let, v njem pa naj bo $3 \cdot 10^{11}$ zvezd s povprečno maso $0,5 M_\odot$ in povprečno hitrostjo 40 km/h.

5. Kolikšna je Eddingtonova limita (L_{Edd}) za črno luknjo v središču naše Galaksije, ki ima maso $M_{\bullet} = 4 \times 10^6 M_{\odot}$?
   Opazovanja kažejo, da je jedro naše Galaksije ne-aktivno oz. da je njegov izsev veliko manjši od L_{Edd}. Predpostavi, da je izsev jedra $L = 2 \times 10^{26}\ W$ in privzami, da je pri padanju snovi z maso m v črno luknjo količina sproščene potencialne energije, ki se pretvori v elektromagnetno sevanje, enaka $\Delta E = 0.1\ mc^2$. Kolikšna masa snovi mora pasti v črno luknjo vsak mesec, da na ta način razložimo opazovani izsev?

6. Predpostavi, da ima nevtronska zvezda takoj po nastanku temperaturo 10^6K: a) pri katerih valovnih dolžinah bi jo najlažje zaznali? b) Kolikšen bi bil njen celoten izsev? c) Kolikšno je razmerje med gravitacijsko in rotacijsko energijo nevtronske zvezde, če se vrti s frekvenco 10 Hz?

7. Eliptična galaksija ima premer 20 kpc in maso $10^{11} M_{\odot}$. Oceni v kolikšnem času bi jo preletela majhna galaksija, ki bi šla skozi njo centralno in bi imela na veliki oddaljenosti glede nanjo zanemarljivo hitrost! Primerjaj ta čas z osnovno lastno frekvenco galaksije!

8. Na priloženi sliki so rotacijske krivulje galaksij. Izračunaj koliko mase obkrožajo najbolj oddaljeni deli galaksij!

9. Kolikšna bi lahko bila največja starost vesolja, ki bi imelo enako povprečno gostoto kot je povprečna gostota snovi v okolici Sonca ($1 M_{\odot}/pc^3$)? Hubblova konstanta je H_0 =75 km/s/Mpc.

10. Kolikšna je bila Jeansova masa ($M_J = \frac{(T/T_0)^{3/2}}{(\varrho/\varrho_0)^{1/2}} \cdot 5,12 \cdot 10^{23}$ g, ϱ_0 =1 g/cm^3, T_0 =1 K) v vesolju v trenutku rekombinacij? Pokaži, da bi se Jeansova masa ohranjala, če bi standardno vesolje ohranjalo homogenost za vse večne čase!